Tentamen Lineaire Algebra 1, 4 februari 2011

Het tentamen bestaat uit 6 vraagstukkken. U krijgt 180 minuten om deze vraagstukken te beantwoorden. U moet de antwoorden beargumenteren. De puntenwaardering kunt u vinden aan het einde van de vraagstukken.

1. Gegeven is de matrix

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 6 \\ 0 & 1 & 2k \\ k & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

met $k \in \mathbb{R}$. Stel b is de vector gegeven door

$$b = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

a. Voor welke waarden van k heeft de vergelijking $Ax = b$ een unieke oplossing?

b. Voor welke waarde van k is de vergelijking strijdig?

c. Voor welke waarde van k heeft de vergelijking oneindig veel oplossingen?

2. Stel $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ en $b \in \mathbb{R}^m$. Beschouw het stelsel lineaire vergelijkingen $Ax = b$, met onbekende $x \in \mathbb{R}^n$. Laat $\mathcal{K}$ de oplossingsverzameling zijn van dit stelsel. $N(A)$ is de oplossingsverzameling van het bijbehorende homogene stelsel $Ax = 0$. $R(A)$ is de kolomruimte van A.

a. Toon aan dat $N(A)$ een deelruimte is van $\mathbb{R}^n$.

b. Toon aan: $\mathcal{K} \neq \emptyset$ dan en slechts dan als $b \in R(A)$.

c. Laat $v \in \mathcal{K}$. Toon aan dat geldt

$$\mathcal{K} = \{v + w \mid w \in N(A)\}.$$

d. Is $\mathcal{K}$ een deelruimte van $\mathbb{R}^n$? Leg uit.

$\mathbb{R}^{2\times 2} \to \mathbb{R}^{2\times 2}$: M-matrix

3. Beschouw de afbeelding $T : \cancel{\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2}$ gedefinieerd door

$$T(M) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} M - M \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

- **a.** Toon aan dat T een lineaire afbeelding is.
- **b.** Bepaal de kern $\ker(T)$ van T.
- **c.** Bepaal een basis van $\ker(T)$.

4. In deze opgave is is P_3 de vectorruimte van alle polynomen van graad kleiner dan 3, met reële coefficienten. Definieer de afbeelding $T : P_3 \to P_3$ door

$$T(p) := p' + p''$$

- **a.** Laat zien dat T een lineaire afbeelding is.
- **b.** Bepaal de kern $\ker(T)$ van T.
- **c.** Bepaal de range $T(P_3)$ van T.
- **d.** Bepaal de matrix $[T]_E$ van T ten opzichte van de geordende basis $E := \{1, x, x^2\}$.

5. Laat $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ and $b \in \mathbb{R}^m$. laat $R(A)$ de kolomruimte van A zijn. We bekijken de lineaire vergelijking $Ax = b$.

- **a.** Laat $\hat{x}$ een oplossing zijn van de "normaalvergelijking" $A^\top A\hat{x} = A^\top b$. Toon aan dat de vector $b - A\hat{x}$ loodrecht op $R(A)$ staat.
- **b.** Neem aan dat $N(A) = \{0\}$. Toon aan dat $A^\top A$ niet-singulier is.
- **c.** Neem aan dat $N(A) = \{0\}$. Toon aan dat de orthogonale projectie van b op $R(A)$ wordt gegeven door $p = A(A^\top A)^{-1}A^\top b$.

2

6. Gegeven is de matrix

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

a. Bepaal het karakteristieke polynoom van A.

b. Bepaal de eigenwaarden van A.

c. Bepaal de eigenvectoren van A

d. Ga na of A diagonaliseerbaar is. Bepaal in dat geval een matrix T zodat $T^{-1}AT$ diagonaal is.

Puntenwaardering:

Vraagstuk 1: 15
Vraagstuk 2: 15
Vraagstuk 3: 15
Vraagstuk 4: 15
Vraagstuk 5: 15
Vraagstuk 6: 15